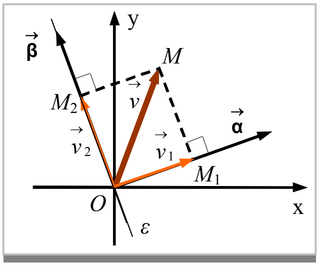
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

η Κάθετες συνιστώσες διανύσματος



Παράδειγμα 1

Θα αναλύσουμε το διάνυσμα $\vec{v} = (1,2)$

σε **δύο κάθετες** μεταξύ τους **συνιστώσες**

από τις οποίες η μία να είναι **παράλληλη** στο $\vec{\alpha} = (3,1)$

Πραγματικά

Θέλουμε διανύσματα $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$, ώστε $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, ώστε $\vec{v}_1 // \vec{\alpha}$ και $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$

Μπορούμε να κινηθούμε ως εξής

Είδαμε ότι $\vec{v}_1 = \lambda\vec{\alpha} = (3\lambda, \lambda)$, οπότε $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = (1,2) - (3\lambda, \lambda) = (1-3\lambda, 2-\lambda)$

και επειδή $\vec{v}_2 \perp \vec{\alpha}$, θα είναι $\vec{v}_2\vec{\alpha} = 0$ ή $(1-3\lambda, 2-\lambda)(3,1) = 0$

ή $3 - 9\lambda + 2 - \lambda = 0$ ή $\lambda = \frac{1}{2}$ και προφανώς είναι $\vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ και $\vec{v}_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και ως εξής

Έστω $\overrightarrow{OM_1} = \vec{v}_1$ και $\overrightarrow{OM_2} = \vec{v}_2$ με $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Το διάνυσμα $\vec{v}_1$ είναι η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$, δηλαδή $\vec{v}_1 = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$

Επειδή $\vec{v}_1 // \vec{\alpha}$ υπάρχει $\lambda \in R$, ώστε $\vec{v}_1 = \lambda\vec{\alpha} = (3\lambda, \lambda)$

Από $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$, είναι $(3,1)\cdot(1,2) = (3,1)\cdot(3\lambda, \lambda)$ ή $3 + 2 = 9\lambda + \lambda$ ή $\lambda = \frac{1}{2}$

Συνεπώς $\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\vec{\alpha} = \frac{1}{2}(3,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = (1,2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Θα μπορούσαμε όμως να κινηθούμε και ως εξής

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-1,3)$

Επειδή $\vec{\alpha}\vec{\beta} = (3,1)(-1,3) = -3 + 3 = 0$ είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

και το πρόβλημα ανάγεται στο να αναλύσουμε το διάνυσμα $\vec{v}$

σε δύο συνιστώσες παράλληλες των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (3,1)$ και $\vec{\beta} = (-1,3)$

Τελικά, είναι $\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\vec{\alpha} = \frac{1}{2}(3,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\vec{\beta} = \frac{1}{2}(-1,3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Θέμα 6

Έστω τα μη μηδενικά

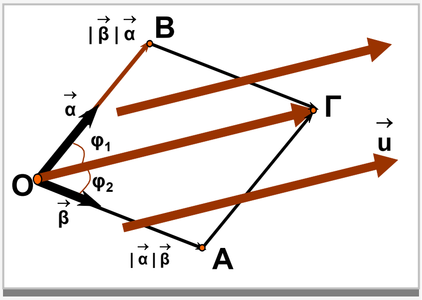
και **μη συγγραμμικά** διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Θα αποδείξουμε ότι ο **φορέας**

του διανύσματος $\vec{u} = |\vec{\beta}|\vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\vec{\beta}$

είναι **παράλληλος** στη **διχοτόμο**

της **γωνίας** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$



Απάντηση

Έστω ω η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, φ_1 η γωνία των $\vec{u}$, $\vec{\alpha}$, φ_2 η γωνία των $\vec{u}$, $\vec{\beta}$

Από $\vec{u} = |\vec{\beta}|\vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\vec{\beta}$

πολλαπλασιάζοντας με $\vec{\alpha}$ είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{u} = |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

ή $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{u}|\sigma\upsilon\nu\varphi_1 = |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\omega$

ή $|\vec{u}|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_1 = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|(1+\sigma\upsilon\nu\omega)$

ή $$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\varphi_1 = \frac{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}{|\vec{u}|}(1+\sigma\upsilon\nu\omega)}$$

Όμοια ...καταλήγουμε ότι $$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = \frac{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}{|\vec{u}|}(1+\sigma\upsilon\nu\omega)}$$

Οπότε $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\varphi_1 = \sigma\upsilon\nu\varphi_2}$ και άρα $\boldsymbol{\varphi_1 = \varphi_2}$

Οπότε, ο φορέας του $\vec{u}$ είναι παράλληλος στη διχοτόμο της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

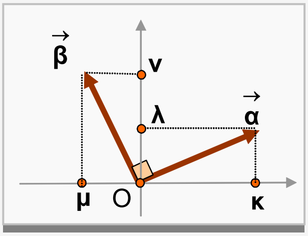
Προσοχή, είναι λάθος να «πούμε» ότι ο φορέας του $\vec{u}$ είναι διχοτόμος της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ … **αφού ένα διάνυσμα «κινείται στο επίπεδο.»**

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το θέμα και ως εξής:

Επειδή $\left||\vec{\beta}|\vec{\alpha}\right| = |\vec{\beta}||\vec{\alpha}|$ και $\left||\vec{\alpha}|\vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

το **παραλληλόγραμμο** είναι και **ρόμβος**, οπότε είναι προφανές ότι $\boldsymbol{\varphi_1 = \varphi_2}$

Θέμα 7



Τα διανύσματα $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda})$ και $\vec{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$

είναι **κάθετα** και έχουν **μέτρα** ίσα με τη **μονάδα**.

Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 1}$

Απάντηση

Μπορούμε να λύσουμε το θέμα ως εξής:

Επειδή $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow (\kappa, \lambda)(\mu, \nu) = 0 \Leftrightarrow \kappa\mu + \lambda\nu = 0$

Επειδή τα μέτρα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα με τη μονάδα

έχουμε $\kappa^2 + \lambda^2 = 1$ και $\mu^2 + \nu^2 = 1$

Από την ταυτότητα $(\kappa^2 + \lambda^2)(\mu^2 + \nu^2) - (\kappa\mu + \lambda\nu)^2 = (\kappa\nu - \lambda\mu)^2$

θα έχουμε $1 \cdot 1 - 0 = (\kappa\nu - \lambda\mu)^2 \Leftrightarrow (\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 1$

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το θέμα και ως εξής:

Είναι $(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = \big((\kappa, \lambda) \cdot (\nu, -\mu)\big)^2 = \left(\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \cdot \sqrt{\nu^2 + \mu^2} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega\right)^2 = 1 \cdot 1 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$,

όπου ω είναι η γωνία των διανυσμάτων (κ, λ) και $(\nu, -\mu)$

Όμως, τα διανύσματα (κ, λ) και $(\nu, -\mu)$ είναι παράλληλα

αφού $\begin{vmatrix} \kappa & \lambda \\ \nu & -\mu \end{vmatrix} = -(\kappa\mu + \lambda\nu) = 0$ και συνεπώς είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = \pm 1$, αφού $\omega = 0$ ή $\omega = \pi$

Επομένως, θα είναι $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και έτσι θα έχουμε $(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 1$

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το θέμα και ως εξής:

Αφού τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (\mu, \nu)$ **κάθετα** και **μοναδιαία**

αν τα τοποθετήσουμε σε σύστημα αξόνων, πρέπει $\kappa = \nu$ και $\lambda = -\mu$

Οπότε $(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = \left(\kappa^2 + \lambda^2\right)^2 = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}^{\,4} = 1$

Ασκήσεις

ι.35● Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B, Γ ως προς κάποιο σημείο αναφοράς O

Είναι $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}$, $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $|\vec{\gamma}|=\dfrac{2}{3}$

α) Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ είναι **συνευθειακά** και το Γ είναι εσωτερικό του AB

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό **γινόμενο** και μετά τη **γωνία** των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

γ) Να αποδείξετε ότι τα O, A, B **ορίζουν τρίγωνο** και η $O\Gamma$ είναι **διχοτόμος** του.

δ) Αν **μέσο** M του AB, δείξτε ότι $\Gamma\hat{O}M=30^o$, δηλαδή η **OM διχοτομεί** την $\Gamma\hat{O}B$

ι.36● Έστω τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ και $\vec{w}$

για τα οποία ξέρουμε ότι $|\vec{v}|=|\vec{u}|=|\vec{w}|=1$ και $\vec{v}\vec{u}+\vec{u}\vec{w}+\vec{w}\vec{v}=-\dfrac{3}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{v}+\vec{u}+\vec{w}=\vec{0}$ και ότι $\vec{v}\vec{u}=\vec{u}\vec{w}=\vec{w}\vec{v}$

β) Θεωρούμε τώρα και τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\vec{v}-\vec{u}$, $\vec{\beta}=\vec{w}-\vec{v}$ και $\vec{\gamma}=\vec{u}-\vec{w}$

β_1) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ανά δύο **δεν** είναι **παράλληλα**.

β_2) Να αποδείξετε ότι τα **μέτρα** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι **ίσα** με $\sqrt{3}$

ι.37● Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$

για τα οποία ισχύουν $\vec{v}\perp\vec{u}$, $|\vec{u}+4\vec{v}|=6$ και $(2\vec{u}+\vec{v})\perp(\vec{u}-4\vec{v})$

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{u}|=2$ και $|\vec{v}|=\sqrt{2}$

β_1) Να βρείτε την **τιμή** της παράστασης $\vec{u}\,\text{προβ}_{\vec{u}}\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{v}\,\text{προβ}_{\vec{v}}\left(\vec{u}-4\vec{v}\right)$

β_2) Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{u}}\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)+\text{προβ}_{\vec{v}}\left(\vec{u}-4\vec{v}\right)=2\vec{u}-4\vec{v}$

ι.38● Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$

για τα οποία ισχύει $4\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\left(\dfrac{1}{2}\vec{\beta}\right)-\vec{\alpha}=\vec{0}$ και $2\text{προβ}_{\vec{\beta}}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)-3\vec{\beta}=\vec{0}$

Να αποδείξετε ότι α) $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ και ότι β) το τρίγωνο OAB είναι **ισόπλευρο**.

ι.39● Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$

για τα οποία ισχύει $4\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\left(\frac{1}{2}\vec{\beta}\right) - \vec{\alpha} = \vec{0}$ και $2\text{προβ}_{\vec{\beta}}\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) - 3\vec{\beta} = \vec{0}$

Να αποδείξετε ότι

α₁) $\vec{\alpha}\,\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\left(\frac{1}{2}\vec{\beta}\right) = \frac{1}{2}\vec{\alpha}\vec{\beta}$ α₂) $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2$

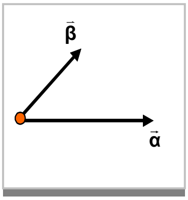
α₃) $\vec{\beta}\,\text{προβ}_{\vec{\beta}}\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = \vec{\beta}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ α₄) $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2$

α₅) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

α₆) $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 60^\circ$

β) Να βρείτε το **είδος** του τριγώνου.

ι.40● Έστω τα **μη μηδενικά** διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$



α₁) Να αποδείξετε ότι: $-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \leq \vec{\alpha}\vec{\beta} \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

α₂) Να **βρείτε** το **ελάχιστο** και **μέγιστο** της παράστασης $\vec{\alpha}\vec{\beta}$
και ποια είναι η **σχετική θέση** των διανυσμάτων στη **θέση ακρότατων ?**

Για τα σημεία $M(x, y)$ ισχύει $x^2 + y^2 = 100$

β₁) Να **βρείτε** δύο διανύσματα με **εσωτερικό** γινόμενο $6x - 8y$

β₂) Μετά, να βρείτε τη **μέγιστη** και την **ελάχιστη τιμή** της $\Pi = 6x - 8y$

γ) Έστω δύο **τετραγωνικά** οικόπεδα I_1, I_2 πλευρών d_1, d_2 σε **m**
Το **κόστος περίφραξης** για το **πρώτο** είναι **1,5 €**uro το τρέχον μέτρο
και για το **δεύτερο** είναι **2 €**uro *το τρέχον μέτρο*
Ξέρουμε ότι το **άθροισμα** των **εμβαδών** των οικοπέδων είναι **100 τ.μ.**
Να αποδείξετε ότι ο **συνολικό κόστος περίφραξης δεν υπερβαίνει** τα **100 €uro**

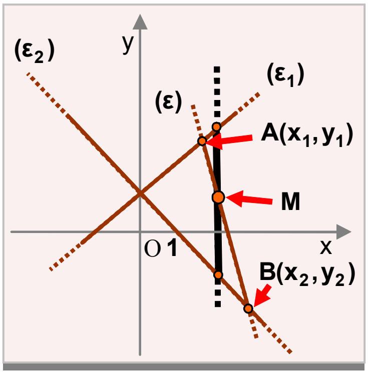
δ) Να αποδείξετε ότι $|6\eta\mu x - 8\sigma\upsilon\nu x| \leq 10$

ΓΡΑΜΜΕΣ

Θέμα 7

Θα **βρούμε** την εξίσωση της ευθείας **(ε)** που **διέρχεται** από το σημείο **Μ(2,1)** και τέμνει τις ευθείες $(\varepsilon_1): y = x + 1$ και $(\varepsilon_2): y = -x + 1$ στα σημεία **Α** και **Β** αντιστοίχως, ώστε το **Μ** να είναι **μέσο** του **ΑΒ**

Απάντηση



Ας δούμε πρώτα τον πιο κάτω τρόπο.

Έστω ότι η ευθεία **(ε)** που διέρχεται από το **Μ**, τέμνει την (ε_1) στο $A(x_1, y_1)$ και την (ε_2) στο $B(x_2, y_2)$

Επειδή το **Μ(2,1)** είναι το **μέσο** του **ΑΒ**, είναι $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 2$ και $\dfrac{y_1 + y_2}{2} = 1$

Επίσης, επειδή το $A(x_1, y_1)$ είναι και σημείο της (ε_1) είναι $(\varepsilon_1): y_1 = x_1 + 1$

επειδή το $B(x_2, y_2)$ είναι και σημείο της (ε_2) είναι $(\varepsilon_2): y_2 = -x_2 + 1$

Θα λύσουμε τώρα το σύστημα

$$\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 2$$

$$\dfrac{y_1 + y_2}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_1 + 1 - x_2 + 1}{2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$y_1 = x_1 + 1$$

$$y_2 = -x_2 + 1$$

Οπότε, η σχέση $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 2$ δίνει $x_1 = 2$ και έτσι είναι και $x_2 = 2$

Οπότε $y_1 = 3$ και $y_2 = -1$

Οπότε, πρόκειται για τα σημεία Α(2,3) και **Β(2,–1)**

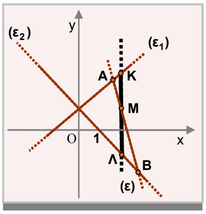
Συνεπώς, η ευθεία του προβλήματος είναι προφανώς η ευθεία $(\varepsilon): x = 2$

Όμως, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το θέμα και κλασικά όπως παρακάτω.

Να τονίσουμε πρώτα κάτι σημαντικό !
Όταν ψάχνουμε ευθεία και δεν ξέρουμε την κλίση της, πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις, αν είναι **κατακόρυφη**, ή αν **δεν** είναι **κατακόρυφη** και έχει κλίση $\boldsymbol{\lambda}$

Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $\mathbf{M(2,1)}$
είναι η κατακόρυφη $\mathbf{x=2}$
και οι μη κατακόρυφες ευθείες με εξισώσεις $\mathbf{(\varepsilon_\lambda): y-1=\lambda(x-2)}$, $\boldsymbol{\lambda\in R}$

• Η ευθεία $\mathbf{x=2}$ τέμνει την $\mathbf{(\varepsilon_1): y=x+1}$ στο σημείο $\mathbf{K(2,3)}$
και την $\mathbf{(\varepsilon_2): y=-x+1}$ στο σημείο $\mathbf{\Lambda(2,-1)}$



Το $\mathbf{K\Lambda}$ έχει **μέσο** το σημείο $\mathbf{M}\left(\dfrac{\mathbf{2+2}}{\mathbf{2}},\dfrac{\mathbf{3+(-1)}}{\mathbf{2}}\right)\equiv\mathbf{M(2,1)}$

Άρα, η κατακόρυφη $\mathbf{x=2}$ είναι μια από τις ζητούμενες ευθείες.

• Η ευθεία $\mathbf{(\varepsilon_\lambda): y-1=\lambda(x-2)}$, $\boldsymbol{\lambda\in R}$ τέμνει τις $\mathbf{(\varepsilon_1): y=x+1}$, $\mathbf{(\varepsilon_2): y=-x+1}$

στα σημεία $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ αντιστοίχως, που οι συντεταγμένες τους
είναι οι λύσεις των συστημάτων: $\mathbf{(\Sigma_1):}\begin{cases}\mathbf{y=x+1}\\ \mathbf{y-1=\lambda(x-2)}\end{cases}$ και $\mathbf{(\Sigma_2):}\begin{cases}\mathbf{y=-x+1}\\ \mathbf{y-1=\lambda(x-2)}\end{cases}$

Από το πρώτο σύστημα, έχουμε: $\mathbf{x+1-1=\lambda x-2\lambda} \Leftrightarrow (\lambda-1)x=2\lambda \Leftrightarrow \mathbf{x}=\dfrac{\mathbf{2\lambda}}{\mathbf{\lambda-1}}$

οπότε $\mathbf{y=x+1}=\dfrac{\mathbf{2\lambda}}{\mathbf{\lambda-1}}+\mathbf{1}=\dfrac{\mathbf{3\lambda-1}}{\mathbf{\lambda-1}}$ και τελικά συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{A}\left(\dfrac{\mathbf{2\lambda}}{\mathbf{\lambda-1}},\dfrac{\mathbf{3\lambda-1}}{\mathbf{\lambda-1}}\right)$

Προφανώς είναι $\boldsymbol{\lambda\neq 1}$
αφού για $\boldsymbol{\lambda=1}$, πρόκειται για την ευθεία $\mathbf{y=x-1}$ η οποία ταυτίζεται με την $\mathbf{(\varepsilon_1)}$

Ομοίως, λύνοντας το δεύτερο σύστημα, καταλήγουμε ότι $\mathbf{B}\left(\dfrac{\mathbf{2\lambda}}{\mathbf{\lambda+1}},\dfrac{\mathbf{1-\lambda}}{\mathbf{\lambda+1}}\right)$

Επειδή το $\mathbf{M(2,1)}$ είναι μέσο του $\mathbf{AB}$, είναι

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}+\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}\right)=2\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\lambda-1}{\lambda-1}+\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1}\right)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4\lambda^2}{\lambda^2-1}=4\\[2ex] \dfrac{3\lambda^2+2\lambda-1-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-1}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda^2=\lambda^2-1\\ \text{και}\\ 2\lambda^2+4\lambda-2=2\lambda^2-2\end{cases}$$

το οποίο προφανώς είναι αδύνατο.

Η **μόνη λύση** του προβλήματός μας, είναι η κατακόρυφη ευθεία $\mathbf{x=2}$

γ Εξίσωση ευθείας

Για να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση της μορφής $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$

είναι εξίσωση ευθείας, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι A, B δεν είναι ταυτόχρονα Μηδέν.

Δηλαδή, αρκεί να αποδείξουμε ότι $|A|+|B|\neq 0$

Παράδειγμα **1**

Έστω η εξίσωση $(\varepsilon): (\mu-1)x+\mu y+\mu^2=0$

Θα αποδείξουμε ότι παριστάνει ευθεία γραμμή, για κάθε πραγματική τιμή του μ

Πραγματικά

Η εξίσωση είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με $A=\mu-1$ και $B=\mu$

Επειδή οι συντελεστές $\mu-1$ και μ …των x και y αντίστοιχα

δεν μηδενίζονται συγχρόνως για καμία τιμή του μ

η δοθείσα εξίσωση παριστάνει για κάθε $\mu\in R$, ευθεία γραμμή.

Παράδειγμα **2**

Έστω η εξίσωση $(\varepsilon): (x-2y+5)+\lambda(3x+2y+7)=0$, όπου $\lambda\in R$

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, αυτή παριστάνει **ευθεία**.

Πραγματικά

Η εξίσωση $\quad (\varepsilon): (x-2y+5)+\lambda(3x+2y+7)=0$

γράφεται ισοδύναμα $\quad x-2y+5+3\lambda x+2\lambda y+7\lambda=0$

$$\Leftrightarrow\ (\varepsilon): (1+3\lambda)x+(-2+2\lambda)y+(5+7\lambda)=0$$

Η εξίσωση είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$, με $A=1+3\lambda$ και $B=-2+2\lambda$

Αν ήταν $A=0 \Leftrightarrow 1+3\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{3}$

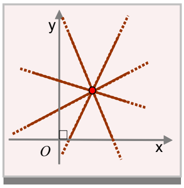
και $B=0 \quad -2+2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ **Άτοπο.**

Οπότε, **δεν υπάρχει** τιμή του λ

που να μηδενίζεται συγχρόνως και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y

Οπότε, η εξίσωση παριστάνει εξίσωση ευθείας για κάθε τιμή του $\lambda\in R$

Ένα κλασικό θέμα είναι
το θέμα σχετικά με το να αποδείξουμε
ότι οι ευθείας μίας οικογένειας ευθειών
διέρχονται από σταθερό σημείο
δηλαδή, αποτελούν δέσμη ευθειών.



Παράδειγμα **3**

Έστω η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x + (\lambda-2)y + (1-2\lambda) = 0$

Θα αποδείξουμε ότι αυτή αποτελεί εξίσωση ευθείας
και ότι όλες οι ευθείες που παράγονται, **διέρχονται** από το **ίδιο σημείο**.

Πραγματικά

Έστω ότι $\lambda + 1 = 0 \iff \lambda = 1$

και $\lambda - 2 = 0 \dashrightarrow -1 = 0$ **Άτοπο.**

Οπότε, η πιο πάνω εξίσωση, είναι μία οικογένεια ευθειών …για κάθε $\lambda \in R$

Ας δούμε, πως θα αποδείξουμε ότι αυτές διέρχονται από σταθερό σημείο.

Για να δείξουμε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το ίδιο σημείο
αρκεί να βρούμε ένα σημείο $\Sigma(x_o, y_o)$ του οποίου οι συντεταγμένες
να επαληθεύουν την αρχική εξίσωση για όλες τις τιμές του λ

Ας θεωρήσουμε δύο συγκεκριμένες απ' αυτές.

Για $\lambda = 0$ προκύπτει η ευθεία $(\varepsilon_1): x - 2y + 1 = 0$

Για $\lambda = 1$ προκύπτει η ευθεία $(\varepsilon_2): 2x - y - 1 = 0$

Λύνοντας το σύστημα αυτών βρίσκουμε απλά ότι $x = 1$ και $y = 1$

Δηλαδή, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $\Sigma(1,1)$

Οπότε, αν όλες διέρχονται από σταθερό σημείο, αυτό θα είναι το σημείο Σ

Ας το αποδείξουμε.

Η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x + (\lambda-2)y + (1-2\lambda) = 0$

για $x = 1$ και $y = 1$ γίνεται $(\lambda+1)\cdot 1 + (\lambda-2)\cdot 1 + (1-2\lambda) = 0 \iff 0 = 0$

Δηλαδή, οι συντεταγμένες του Σ ικανοποιούν την (ε_λ)

Οπότε, όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σταθερό σημείο Σ

Θα μπορούσαμε όμως, να κινηθούμε και ως εξής:

Η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x+(\lambda-2)y+(1-2\lambda)=0$

γίνεται $(\varepsilon_\lambda): \lambda x+x+\lambda y-2y+1-2\lambda=0$

ή $(x+y-2)\lambda+(x-2y+1)=0$ …για κάθε $\lambda \in R$

Οπότε, πρέπει $x+y-2=0$ και $x-2y-1=0$

Λύνοντας το πιο πάνω σύστημα βρίσκουμε απλά ότι $x=1$ και $y=1$

Δηλαδή, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $\Sigma(1,1)$

Οπότε, όλες διέρχονται από **σταθερό σημείο**, το σημείο Σ

Θα μπορούσαμε όμως να κινηθούμε και όπως πιο κάτω:

Έστω η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x+(\lambda-2)y+(1-2\lambda)=0$

Θεωρούμε δύο τυχούσες απ' αυτές, τις $(\varepsilon_1): (\lambda_1+1)x+(\lambda_1-2)y+(1-2\lambda_1)=0$

και $(\varepsilon_2): (\lambda_2+1)x+(\lambda_2-2)y+(1-2\lambda_2)=0$

που υποθέτουμε ότι είναι διαφορετικές, δηλαδή ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Θα λύσουμε το σύστημά τους.

Είναι $(\Sigma): \begin{cases} (\lambda_1+1)x+(\lambda_1-2)y=2\lambda_1-1 \\ (\lambda_2+1)x+(\lambda_2-2)y=2\lambda_2-1 \end{cases}$

Είναι $D=\begin{vmatrix} \lambda_1+1 & \lambda_1-2 \\ \lambda_2+1 & \lambda_2-2 \end{vmatrix} = (\lambda_1+1)(\lambda_2-2)-(\lambda_2+1)(\lambda_1-2)$

$$= (\lambda_1\lambda_2-2\lambda_1+\lambda_2-2)-(\lambda_1\lambda_2-2\lambda_2+\lambda_1-2)$$

$$= 3(\lambda_2-\lambda_1) \neq 0$$

Επίσης, πολύ απλά, διαπιστώνουμε ότι $D_x=\begin{vmatrix} 2\lambda_1-1 & \lambda_1-2 \\ 2\lambda_2-1 & \lambda_2-2 \end{vmatrix} = 3(\lambda_2-\lambda_1)$

και $D_y=\begin{vmatrix} \lambda_1+1 & 2\lambda_1-1 \\ \lambda_2+1 & 2\lambda_2-1 \end{vmatrix} = 3(\lambda_2-\lambda_1)$

Συνεπώς, το σύστημα δέχεται **μοναδική λύση** την $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=(1,1)$

Επειδή οι τυχούσες ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τέμνονται στο $\Sigma(1,1)$

συμπεραίνουμε ότι και όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σημείο $\Sigma(1,1)$

Επίσης ένα κλασικό θέμα
είναι το θέμα σχετικά με το να εξετάσουμε αν κάποια ευθεία, είναι τελικά ευθεία μίας δέσμης ευθειών.

Παράδειγμα 4

Όπως είδαμε πριν, η εξίσωση $(\varepsilon_\lambda):(\lambda+1)x+(\lambda-2)y+(1-2\lambda)=0$

αποτελεί μία δέσμη ευθειών, δηλαδή ευθείες που **διέρχονται** από το **ίδιο σημείο** και μάλιστα το σημείο $\Sigma(1,1)$

Θα εξετάσουμε τώρα, αν η ευθεία $(\delta):4x+y-3=0$ είναι ευθεία της οικογένειας.

Επειδή για $x=1$ και $y=1$ αυτή δίνει $4+1-3=2\neq 0$

αυτή **δεν διέρχεται** από το Σ και άρα **δεν είναι ευθεία της οικογένειας**.

Να τονίσουμε τώρα κάτι σημαντικό.

Αν κάποια ευθεία διέρχεται από το σταθερό σημείο $\Sigma(1,1)$
δεν είναι κατά ανάγκη και ευθεία της οικογένειας.

Για παράδειγμα, θα εξετάσουμε αν η ευθεία $(\delta):x+y-2=0$

είναι ευθεία της παραπάνω οικογένειας $(\varepsilon_\lambda):(\lambda+1)x+(\lambda-2)y+(1-2\lambda)=0$

Για $x=1$ και $y=1$, αυτή δίνει $1+1-2=0$ …δηλαδή αυτή διέρχεται από το $\Sigma(1,1)$

Όμως, αυτό δεν διαπιστώνει ότι αυτή είναι ευθεία της οικογένειας.

Ας δούμε πρώτα τι γίνεται, μέσα από το πιο κάτω παράδειγμα.

Έστω η οικογένεια ευθειών $(\varepsilon_\lambda):y=\lambda^2x+1-\lambda^2\ \ldots\lambda\in R$

της οποίας οι ευθείες διέρχονται προφανώς από το **σημείο** $\Sigma(1,1)$

Επειδή αυτές έχουν **κλίση** μη αρνητική, την λ^2
σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες των γωνιών που σχηματίζουν αυτές με τον $x'x$
είναι θετικές, δηλαδή αυτές σχηματίζουν με τον $x'x$ γωνίες **οξείες**.
Οπότε, ναι μεν η ευθεία $(\zeta):y=-x+2$ διέρχεται από το σημείο $\Sigma(1,1)$

αλλά επειδή έχει αρνητική κλίση, προφανώς **δεν** είναι ευθεία της οικογένειας (ε_λ)

Ας δούμε τώρα σε μία τέτοια περίπτωση
κατά την οποία μία ευθεία διέρχεται από το σταθερό σημείο που διέρχονται οι ευθείες μίας οικογένειας, αν είναι μία ευθεία αυτής.

Γνωρίζουμε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$

$(\varepsilon_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$ **ταυτίζονται, μόνο αν**

οι συντελεστές A_1, B_1, Γ_1 **είναι αντίστοιχα ανάλογοι των** A_2, B_2, Γ_2

Ας δούμε ξανά το προηγούμενο παράδειγμα.

Έστω η οικογένεια ευθειών $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x + (\lambda-2)y + (1-2\lambda) = 0$

και έστω και η ευθεία $(\zeta): y = -x + 2$ η οποία διέρχεται από το σημείο $\Sigma(1,1)$

Για να είναι η ευθεία $(\zeta): y = -x + 2 \Leftrightarrow (\zeta): x + y - 2 = 0$

μία ευθεία της αρκεί να υπάρχει $\lambda \in R$ ώστε $\dfrac{\lambda+1}{1} = \dfrac{\lambda-2}{1} = \dfrac{1-2\lambda}{-2}$

Από $\dfrac{\lambda+1}{1} = \dfrac{\lambda-2}{1}$ είναι $\lambda+1 = \lambda-2 \Leftrightarrow 1 = -2$ Αδύνατο.

Οπότε, αυτή δεν είναι ευθεία της οικογένειας.

Ας εξετάσουμε αν η ευθεία $(\delta): 3x + y - 4 = 0$
είναι ευθεία της παραπάνω οικογένειας $(\varepsilon_\lambda): (\lambda+1)x + (\lambda-2)y + (1-2\lambda) = 0$

Για $x = 1$ και $y = 1$, αυτή δίνει $1 + 1 - 2 = 0$ …δηλαδή αυτή διέρχεται από το $\Sigma(1,1)$

Για να είναι η ευθεία $(\delta): 3x + y - 4 = 0$ μία ευθεία της

αρκεί να υπάρχει $\lambda \in R$, ώστε $\dfrac{\lambda+1}{3} = \dfrac{\lambda-2}{1} = \dfrac{1-2\lambda}{-4}$

Λύνοντας το σύστημα αυτό, προκύπτει $\lambda = \dfrac{7}{2}$

Οπότε, αυτή είναι μία ευθεία της οικογένειας αυτής.

θ Γενικά θέματα

Θέμα 1

Έστω η εξίσωση $(c): 6x^2 - y^2 + 3x + y - xy = 0$

α) Θα αποδείξουμε ότι αυτή παριστάνει **δύο ευθείες** τεμνόμενες.

β) Θα βρούμε την **οξεία γωνία** αυτών.

Απάντηση

α) Η εξίσωση $6x^2 - y^2 + 3x + y - xy = 0$

γίνεται $y^2 + (x-1)y - 3x - 6x^2 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta_x &= (x-1)^2 - 4(-3x - 6x^2)\\ &= x^2 - 2x + 1 + 12x + 24x^2\\ &= 25x^2 + 10x + 1\\ &= (5x+1)^2\end{aligned}$$

Οπότε $y = \dfrac{1 - x + 5x + 1}{2} \Leftrightarrow (\varepsilon_1): y = 2x + 1$

ή $y = \dfrac{1 - x - 5x - 1}{2} \Leftrightarrow (\varepsilon_2): y = -3x$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει τις δύο ευθείες.

β) Η ευθεία $(\varepsilon_1): y = 2x + 1$ γράφεται και ως $(\varepsilon_1): 2x - y + 1 = 0$

και η ευθεία $(\varepsilon_2): y = -3x$ γράφεται και ως $(\varepsilon_2): 3x + y = 0$

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (1,2) // (\varepsilon_1)$ και $\vec{\delta}_2 = (1,-3) // (\varepsilon_2)$

Έτσι $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}\right) = \dfrac{\vec{\delta}_1 \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|} = \dfrac{1 \cdot 1 + 2(-3)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και επειδή $\left(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}\right) \in [0, \pi]$, θα είναι $\left(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$

Οπότε, η αμβλεία γωνία ω των ευθειών (ε_1), (ε_2), είναι η $\omega = \dfrac{3\pi}{4}$

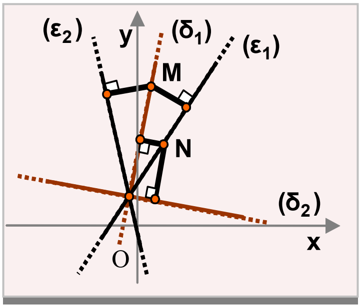
και συνεπώς η **οξεία γωνία** φ των (ε_1), (ε_2) θα είναι $\varphi = \pi - \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

Θέμα 2

Θα βρούμε τις εξισώσεις των **διχοτόμων** των γωνιών

που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x - 4y + 1 = 0$ και $(\varepsilon_2): 5x + 12y + 4 = 0$

Απάντηση



Ένα σημείο $M(x, y)$

ανήκει σε μια από τις διχοτόμους των γωνιών

που ορίζουν οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x - 4y + 1 = 0$

και $(\varepsilon_2): 5x + 12y + 4 = 0$

αν και μόνο αν ισαπέχει από τις δύο ευθείες.

Δηλαδή, αν $\quad d(M, (\varepsilon_1)) = d(M, (\varepsilon_2))$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|5x + 12y + 4|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|5x + 12y + 4|}{13}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 13(3x - 4y + 1) = 5(5x + 12y + 4) \\ \text{ή} \\ 13(3x - 4y + 1) = -5(5x + 12y + 4) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 39x - 42y + 13 = 25x + 60y + 20 \\ \text{ή} \\ 39x - 42y + 13 = -25x - 60y - 20 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (\delta_1): 14x - 102y - 7 = 0 \text{ ή } (\delta_2): 64x + 18y + 33 = 0$$

Άρα, οι εξισώσεις

των διχοτόμων είναι οι ευθείες $(\delta_1): 14x - 102y - 7 = 0$, $(\delta_2): 64x + 18y + 33 = 0$

Επιλέγουμε ένα τυχόν σημείο N της (ε_1) για παράδειγμα το $N\left(2, \frac{7}{4}\right)$

Είναι $\quad d(N, (\varepsilon_1)) = \dfrac{\left|2 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{7}{4} + 1\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{2}{5}$ και $d(N, (\varepsilon_2)) = \dfrac{\left|5 \cdot 2 + 12 \cdot \frac{7}{4} + 4\right|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \dfrac{35}{13}$

Επειδή $d(N, (\varepsilon_1)) < d(N, (\varepsilon_2))$

η (δ_1) είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας των ευθειών

και η (δ_2) είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας των ευθειών.

Να τονίσουμε, ότι ο εντοπισμός της διχοτόμου της οξείας ή αμβλείας γωνίας μπορεί να γίνει και με τη χρήση γραμμικών ανισώσεων.

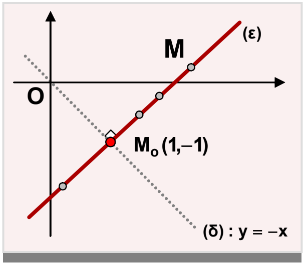
Θέμα 3

Έστω τα σημεία $\mathbf{M(x,y)}$, ώστε $\mathbf{x = 2\lambda + 1}$ και $\mathbf{y = 2\lambda - 1}$, $\boldsymbol{\lambda \in R}$

Αφού αποδείξουμε ότι τα σημεία **Μ** βρίσκονται σε ευθεία, για τις τιμές του $\boldsymbol{\lambda \in R}$

στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι εκείνο το σημείο που απέχει τη **μικρότερη απόσταση** από το $\mathbf{O(0,0)}$ είναι το σημείο $\mathbf{M_o(1,-1)}$

Απάντηση



Από $\mathbf{2\lambda + 1 = x}$ και $\mathbf{2\lambda - 1 = y}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\lambda = \dfrac{x-1}{2}}$, $\boldsymbol{\lambda = \dfrac{y+1}{2}}$

Οπότε $\dfrac{y+1}{2} = \dfrac{x-1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{y = x - 2 : (\varepsilon)}$

Η ευθεία $\mathbf{(\varepsilon) : y = x - 2}$ αποτελεί και το **γεωμετρικό τόπο** των σημείων **Μ**

Θα προσδιορίσουμε τώρα την ευθεία **(δ)**

που διέρχεται από το **Ο(0,0)** και είναι κάθετη στην ευθεία **(ε)**

Επειδή $\mathbf{(\delta) \perp (\varepsilon)}$, είναι προφανώς $\boldsymbol{\lambda_\delta = -1}$ και τελικά είναι $\mathbf{(\delta) : y = -x}$

Λύνοντας το σύστημα των $(\varepsilon),(\delta)$ είναι $x - 2 = -x \Leftrightarrow \mathbf{x = 1}$ και συνεπώς $\mathbf{y = -1}$

Οπότε, οι ευθείες $(\varepsilon),(\delta)$ τέμνονται στο σημείο $\mathbf{M_o(1,-1)}$

Μάλλον όμως, ο «καλύτερος τρόπος» για το ελάχιστο είναι ο παρακάτω:

Επειδή $\mathbf{M(2\lambda + 1, 2\lambda - 1)}$

$$\mathbf{OM} = \sqrt{\mathbf{(2\lambda+1)^2 + (2\lambda-1)^2}} = \sqrt{4\lambda^2 + 4\lambda + 1 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1}$$

$$= \sqrt{\mathbf{8\lambda^2 + 2}}$$ το οποίο **ελαχιστοποιείται** για $\boldsymbol{\lambda = 0}$

Οπότε, πρόκειται για το σημείο $\mathbf{M_o(1,-1)}$

Ας προσέξουμε και το πιο κάτω θέμα.

Θέμα 4

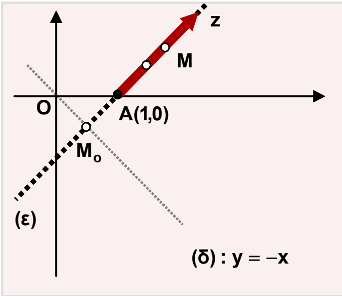
Έστω τα σημεία $\mathbf{M(x,y)}$ ώστε $\mathbf{x = 2\lambda^2 + 1}$ και $\mathbf{y = 2\lambda^2}$, $\boldsymbol{\lambda \in R}$

Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία **βρίσκονται** τα σημεία **M** για τις διάφορες τιμές του $\boldsymbol{\lambda \in R}$

Από τα παραπάνω σημεία

θα αποδείξουμε ότι το **A(1,0)** απέχει από το **O(0,0)**, τη **μικρότερη απόσταση**.

Απάντηση



Έστω τα σημεία $\mathbf{M(x,y)}$

Από $2\lambda^2 + 1 = x$ και $2\lambda^2 = y$ $\Leftrightarrow$ $\lambda^2 = \dfrac{x-1}{2}$, $\lambda^2 = \dfrac{y}{2}$

Οπότε $\dfrac{y}{2} = \dfrac{x-1}{2}$ και ισοδύναμα $\mathbf{y = x - 1 : (\varepsilon)}$

Δηλαδή, τα σημεία $M(z) \equiv (2\lambda^2 + 1, 2\lambda^2)$ είναι σημεία της ευθείας $\mathbf{(\varepsilon) : y = x - 1}$

Όμως, πολύ απλά, εδώ διαπιστώνεται ότι ο τόπος **δεν** είναι ολόκληρη η ευθεία (ε)

αφού $\lambda^2 = \dfrac{x-1}{2} \geq 0$ και ισοδύναμα $x \geq 1$

Δηλαδή, ο γεωμετρικός τόπος, είναι η ημιευθεία $\mathbf{(Az) : y = x - 1}$ με **A(1,0)**

Όμως τώρα, δεν έχει νόημα να προσδιορίσουμε την ευθεία $(\delta) : y = -x$

για να εντοπίσουμε το σημείο τομής των (ε), (δ) το $M_o \equiv M(z_o) \equiv \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

αφού αυτό **δεν** είναι σημείο του τόπου.

Να τονίσουμε ότι εδώ

ότι το ζητούμενο σημείο **A** που απέχει από το **O** τη **μικρότερη απόσταση**

είναι προφανώς το σημείο **A(1,0)**

αφού προφανώς η εικόνα του A, είναι το σημείο της ημιευθείας **Az**

που απέχει από την αρχή O τη **μικρότερη δυνατή απόσταση**.

γ Εφαπτομένες ευθείες

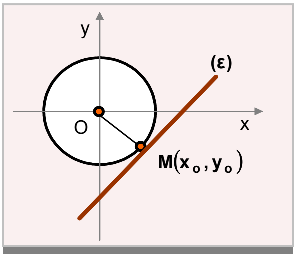
Η σχετική θέση μίας ευθείας με ένα κύκλο, διευκρινίζεται από το πλήθος λύσεων του συστήματός των.

Παράδειγμα 1

Θα βρούμε τη σχετική θέση της ευθείας $(\varepsilon): y = x - \sqrt{2}$

με το κύκλο $(\kappa): x^2 + y^2 = 1$

Πραγματικά



Μπορούμε να κινηθούμε ως εξής.

Λύνοντας το σύστημα τους, η εξίσωση $(\kappa): x^2 + y^2 = 1$

γίνεται $x^2 + (x - \sqrt{2})^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}x - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Διπλή ρίζα.

Διαπιστώσαμε, ότι η ευθεία (ε) **εφάπτεται** του κύκλου (κ) στο $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και με τη βοήθεια της γεωμετρίας.

Επειδή η απόσταση d του κέντρου O του κύκλου από την ευθεία (ε)

είναι $d = d(O, \varepsilon) = \dfrac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 1 = \rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου

προφανώς η ευθεία (ε) **εφάπτεται** του κύκλου (κ)

Μπορούμε να κινηθούμε και με τη βοήθεια του τύπου της εφαπτομένης.

Έστω το τυχόν σημείο $M(x_o, y_o)$ του κύκλου

Η εφαπτομένη σ'αυτό είναι η ευθεία $(\varepsilon): x_o x + y_o y = 1 \Leftrightarrow (\varepsilon): y = -\dfrac{x_o}{y_o}x + \dfrac{1}{y_o}$

Θέλουμε αυτή να είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = x - \sqrt{2}$

Οπότε, πρέπει $-\dfrac{x_o}{y_o} = 1$ και $\dfrac{1}{y_o} = -\sqrt{2}$, όπου $y_o = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $x_o = \sqrt{2}$

Δηλαδή, διαπιστώνουμε ότι η (ε) **εφάπτεται** του κύκλου (κ), στο $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

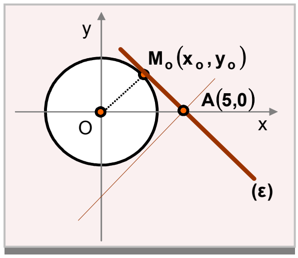
Ας δούμε πως βρίσκουμε την εφαπτομένη κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ με κάποια ιδιότητα, όπου δεν ξέρουμε το σημείο επαφής.

Παράδειγμα **2**

Θα βρούμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $(\kappa): x^2 + y^2 = 5$

οι οποίες **διέρχονται** από το σημείο $A(5,0)$

Πραγματικά



Μπορούμε να κινηθούμε ως εξής.

Αν $M_o(x_o, y_o)$ είναι το σημείο επαφής

η εφαπτομένη έχει εξίσωση $(\varepsilon): x_o x + y_o x = 5$

Επειδή $A(5,0) \in (\varepsilon)$, είναι $5x_o + 0y_o = 5 \Leftrightarrow x_o = 1$

Επειδή $M_o(x_o, y_o) \in (\kappa)$, είναι και $x_o^2 + y_o^2 = 5$

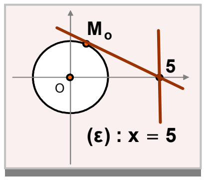
και για $x_o = 1$, αυτή γίνεται $1 + y_o^2 = 5 \Leftrightarrow y_o^2 = 4 \Leftrightarrow y_o = -2$ ή $y_o = 2$

Οπότε, υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα $M_1(1,2)$ και $M_2(1,-2)$

και οι εφαπτομένες, είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1): x + 2y - 5 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - 2y - 5 = 0$

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και με τη χρήση συστημάτων.

Πιο συγκεκριμένα:



Κάθε ευθεία η οποία **διέρχεται** από το σημείο $A(5,0)$

ή θα είναι κατακόρυφη και θα έχει εξίσωση $(\varepsilon): x = 5$

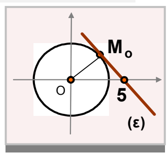
ή οποία όμως **δεν** αποτελεί λύση του προβλήματος

ή δεν θα είναι κατακόρυφη με εξίσωση $(\varepsilon_\lambda): y - 0 = \lambda(x-5) \Leftrightarrow (\varepsilon_\lambda): y = \lambda x - 5\lambda$

Η εξίσωση του κύκλου γίνεται $x^2 + (\lambda x - 5\lambda)^2 = 5 \Leftrightarrow (\lambda^2+1)x^2 - 10\lambda^2 x + 25\lambda^2 - 5 = 0$

Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow 100\lambda^4 - 4(25\lambda^2 - 5)(\lambda^2+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{2}$

και οι εφαπτομένες είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1): x + 2y - 5 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - 2y - 5 = 0$



Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και με τη γεωμετρία.

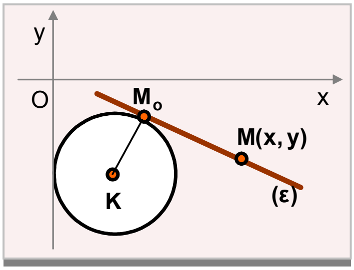
Πριν βρήκαμε την τυχούσα ευθεία $(\varepsilon_\lambda): \lambda x - y - 5\lambda = 0$

Θέλουμε $d(O,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \dfrac{|-5\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5|\lambda| = \sqrt{5}\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow \lambda^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{2}$

και οι εφαπτομένες είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1): x + 2y - 5 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - 2y - 5 = 0$

Ας δούμε πως βρίσκουμε την εφαπτομένη κύκλου με κέντρο διαφορετικό του $O(0,0)$ σε δεδομένο σημείο του.

Παράδειγμα 3



Θα βρούμε την εφαπτομένη

του κύκλου $(\kappa): (x-1)^2+(y+2)^2=1^2$

στο σημείο του $M_o\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}-4}{2}\right)$

Πραγματικά

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $\rho=1$

Έστω το τυχόν σημείο $M(x,y)$ της εφαπτόμενης ευθείας (ε)

Πρέπει $\overrightarrow{M_oK}\perp\overrightarrow{M_oM}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_oK}\cdot\overrightarrow{M_oM}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{2},-2-\frac{\sqrt{3}-4}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{\sqrt{3}-4}{2}\right)=0$$

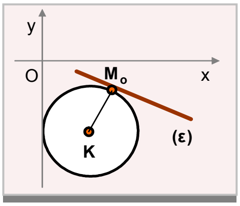
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{\sqrt{3}-4}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{4}-\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon): x-\sqrt{3}y-\sqrt{3}+1=0$$

Ας δούμε πως βρίσκουμε την εφαπτομένη κύκλου με κέντρο διαφορετικό του $O(0,0)$ με κάποια ιδιότητα, όπου δεν ξέρουμε το σημείο επαφής.

Παράδειγμα 4



Θα εξετάσουμε αν η ευθεία $(\varepsilon): 2x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3}+2=0$

εφάπτεται του κύκλου $(\kappa): (x-1)^2+(y+2)^2=1^2$

Πραγματικά

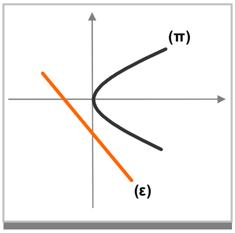
Επειδή $d(K,\varepsilon)=\frac{|2+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2|}{\sqrt{4+12}}=\frac{4}{4}=1=\rho$, η ευθεία **εφάπτεται** του (κ)

Φυσικά, θα μπορούσαμε να κινηθούμε και με μία από τις προηγούμενες τεχνικές.

β Εφαπτομένες παραβολής

Γενικά. η σχετική θέση μιας ευθείας και μίας παραβολής, διευκρινίζεται από την επίλυση του αντίστοιχου συστήματος των εξισώσεών τους.

Πιο συγκεκριμένα



- Αν το σύστημα είναι **αδύνατο** η ευθεία **δεν τέμνει** την παραβολή.

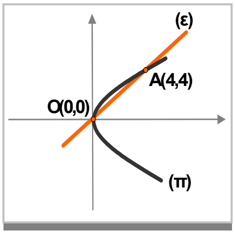
Παράδειγμα 1

Έστω η παραβολή $(\pi): y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = -x - 2$

Λύνοντας το σύστημά τους

είναι $(-x - 2)^2 = 4x$ ή $x^2 + 4 = 0$ Αδύνατο

Συνεπώς, η ευθεία **δεν τέμνει** την παραβολή.



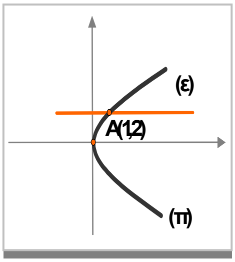
- Αν το σύστημα δώσει **δύο** διαφορειτκές **λύσεις** η ευθεία τέμνει την παραβολή σε **δύο** διαφορειτκές **σημεία**.

Παράδειγμα 2

Έστω η παραβολή $(\pi): y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x$

Λύνοντας το σύστημά τους, είναι $x^2 = 4x$ ή $x = 0$ ή $x = 2$

Συνεπώς, η (ε) τέμνει την (π) στα σημεία **O(0,0) και A(4,4)**



- Αν το σύστημα δώσει **μία λύση** η ευθεία **τέμνει** την παραβολή σε **ένα σημείο**.

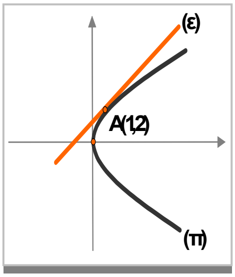
Παράδειγμα 3

Έστω η παραβολή $(\pi): y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = 2$

Λύνοντας το σύστημά τους, είναι $2^2 = 4x$ ή $x = 1$

Οπότε, η (ε) τέμνει την (π) στο σημείο **A(1,2)**

Συνεπώς, η ευθεία τέμνει την παραβολή σε ένα σημείο.



- Αν το σύστημα δώσει μία **διπλή λύση** η ευθεία **εφάπτεται** της παραβολής.

Παράδειγμα 4

Έστω η παραβολή $(\pi): y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 1$

Λύνοντας το σύστημα είναι $(x + 1)^2 = 4x$ ή $(x - 1)^2 = 0$

και προκύπτει **διπλή λύση** ο αριθμός **1**

Οπότε, η (ε) **εφάπτεται** της (π) στο σημείο **A(1,2)**

Δηλαδή, το θέμα της επαφής, διευκρινίζεται και με τη βοήθεια των συστημάτων.

Να τονίσουμε, ότι το θέμα της εφαπτομένης, πραγματώνεται και με την βοήθεια του τύπου που είδαμε εδώ στην παραβολή.

Έστω η παραβολή $(\pi): x^2 = 4y$

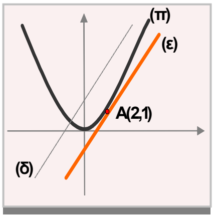
Η **εφαπτομένη** (ε) στο τυχόν σημείο της $M_o(x_o, y_o)$, είναι η $(\varepsilon): x_o x = 2(y + y_o)$

ή $(\varepsilon): y = \left(\frac{1}{2}x_o\right) \cdot x - y_o$

Παράδειγμα 5

Θα βρούμε την **εφαπτομένη** που είναι **παράλληλη** στην $(\delta): y = x + 1$

Πραγματικά



Επειδή $(\varepsilon) \,//\, (\delta): y = x + 1$ είναι $\frac{1}{2}x_o = 1 \Leftrightarrow x_o = 2$

Επειδή όμως το σημείο $M_o(x_o, y_o)$ είναι και σημείο της (π)

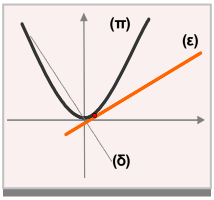
είναι και $x_o^2 = 4y_o \Leftrightarrow y_o = 1$

Οπότε, η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της (π), είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = x - 1$

Παράδειγμα 6

Θα βρούμε την **εφαπτομένη** που είναι **κάθετη** στην $(\delta): y = -2x$

Πραγματικά



Επειδή η **εφαπτομένη** (ε) είναι κάθετη στην $(\delta): y = -2x$

θα είναι $\frac{1}{2}x_o(-2) = -1 \Leftrightarrow x_o = 1$

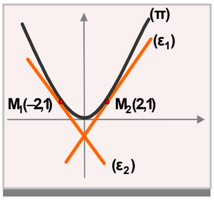
Επειδή όμως το $M_o(x_o, y_o)$ ανήκει στη (π), είναι $x_o^2 = 4y_o$

Έτσι, καταλήγουμε ότι $y_o = \frac{1}{4}$ και η εφαπτόμενη ευθεία είναι η $(\varepsilon): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Παράδειγμα 7

Θα βρούμε τις **εφαπτομένες** που **διέρχονται** από το σημείο $A(0,-1)$

Πραγματικά



Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$

όπως και πριν, θα είναι $-1 = -y_o \Leftrightarrow y_o = 1$

και επειδή είναι $x_o^2 = 4y_o$ καταλήγουμε ότι $x_o^2 = 4$

και ισοδύναμα $x_o = 2$ ή $x_o = -2$

Άρα, υπάρχουν δύο σημεία επαφής τα $M_1(-2,1)$ και $M_2(2,1)$

και οι αντίστοιχες **εφαπτομένες** έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): y = -x - 1$, $(\varepsilon_2): y = x - 1$

Θέμα 1

Έστω η παραβολή $(\pi): y^2 = 2px$, $p > 0$

Έστω το τυχαίο σημείο της $M(x_o, y_o)$

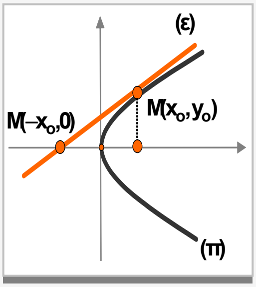
Θα αποδείξουμε ότι

η ευθεία NM όπου $N(-x_o, 0)$ είναι **εφαπτομένη** της (π)

Έστω τώρα η παραβολή $(\pi): y^2 = 64x$

Θα **κατασκευάσουμε** με κανόνα, την **εφαπτομένη** της (ε)

στο σημείο της $M(1,8)$



Απάντηση

Ας βρούμε πρώτα την ευθεία (MN)

Αυτή έχει κλίση τον αριθμό $\lambda = \dfrac{y_o}{2x_o}$ και ως διερχόμενη του $N(-x_o, 0)$

έχει προφανώς εξίσωση την $(\varepsilon): y - 0 = \dfrac{y_o}{2x_o}(x + x_o)$ ή $y = \dfrac{y_o}{2x_o}x + \dfrac{y_o}{2}$

Θα λύσουμε τώρα το σύστημα της ευθείας με την παραβολή.

Η παραβολή $(\pi): y^2 = 2px$ γίνεται $\left(\dfrac{y_o}{2x_o}x + \dfrac{y_o}{2}\right)^2 = 2px$

ή $\dfrac{y_o^2}{4x_o^2} + \dfrac{y_o^2}{2x_o}x + \dfrac{y_o^2}{4} = 2px$ ή $\dfrac{y_o^2}{4x_o^2}x^2 + \left(\dfrac{y_o^2}{2x_o} - 2p\right)x + \dfrac{y_o^2}{4} = 0$

ή $\dfrac{2px_o}{4x_o^2}x^2 + \left(\dfrac{2px_o}{2x_o} - 2p\right)x + \dfrac{2px_o}{4} = 0$ ή $\dfrac{\rho}{2x_o}x^2 - \rho x + \dfrac{\rho x_o}{2} = 0$

Είναι $\Delta = \rho^2 - 4\dfrac{\rho}{2x_o} \cdot \dfrac{\rho x_o}{2} = 0$

Οπότε η ευθεία (MN) **εφάπτεται** της (π)

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε πολύ πιο άνετα, όπως πιο κάτω.

Η εφαπτομένη στο σημείο $M(x_o, y_o)$ της παραβολής είναι η $(\varepsilon): y_o y = \rho(x + x_o)$

Αρκεί να αποδείξουμε, ότι αυτή **διέρχεται** από το σημείο $N(-x_o, 0)$

Πραγματικά

Η $(\varepsilon): y_o y = \rho(x + x_o)$ για $x = -x_o$ και $y = 0$

δίνει $y_o \cdot 0 = \rho(-x_o + x_o) \Leftrightarrow 0 = 0$ …Προφανές

Δηλαδή, η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο N, που σημαίνει ότι η ευθεία (MN) **εφάπτεται** της (π)

Ασκήσεις

β.1● Έστω η παραβολή $(\pi): y^2 = 4x$

α) Να βρείτε το σημείο της M_o με **τετμημένη** 1 και τεταγμένη **θετική**.

β) Να βρείτε την **εφαπτομένη** της παραβολής στο σημείο της M_o

β.2● Να βρείτε την **εφαπτομένη** της παραβολής $(\pi): y^2 = 4x$, που έχει **κλίση** 1

β.3● Να βρείτε την **εφαπτομένη** της $(\pi): y = -x^2$ στο σημείο της $M_o(1, \rho)$

β.4● Να βρείτε την **εφαπτόμενη** της παραβολής $(\pi): x^2 = 4y$, με **κλίση** 1

β.5● Έστω η παραβολή $(\pi): y^2 = 0{,}25x$

Να **βρείτε** τον x_o ώστε η **εφαπτομένη** στο σημείο της $M\left(x_o, 0{,}5\sqrt{x_o}\right)$ να **διέρχεται** από το σημείο $A(-1{,}0)$

β.6● Να εξετάσετε αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 1$, **εφάπτεται** της $(\pi): y^2 = 4x$

β.7● Να βρείτε τις **εφαπτομένες** της παραβολής $(\pi): y^2 = 4x$, οι οποίες **άγονται** από το σημείο $A(-1{,}0)$ προς αυτή.

β.8● Έστω η παραβολή $(\pi): y^2 = 4x$

Να βρείτε την **τιμή** του κ, ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + \kappa$, να **εφάπτεται** αυτής.

β.9● Έστω η παραβολή $(\pi): y^2 = 2x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$

α) Να βρείτε τη **συνθήκη** μεταξύ των α, β, ώστε η (ε) να **εφάπτεται** της (π)

β) Να **βρείτε** τον λ, ώστε η $(\varepsilon): y = \lambda^4 x + 0{,}5\lambda$ να **εφάπτεται** της παραβολής (π)

β.10● Έστω η παραβολή $(\pi): y^2 = 12x$

Η **εφαπτομένη** της παραβολής στο σημείο $A\left(1, 2\sqrt{3}\right)$ τέμνει τον $x'x$ στο B

α) Να αποδείξετε ότι $B(-1{,}0)$

β) Μετά να αποδείξετε ότι το **τρίγωνο** EAB είναι **ισόπλευρο**, με πλευρά $\alpha = 4$

β.11● Έστω οι παραβολές $(\pi_1): y^2 = 4x$ και $(\pi_2): y^2 = 16x$

Να αποδείξετε ότι οι **εφαπτομένες** αυτών αντίστοιχα στα σημεία $A_1(1{,}2)$, $A_2(1{,}4)$ **διέρχονται** από το **ίδιο σημείο** του άξονα $x'x$